Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat S.T.L. biotechnologies Métropole 2015

EXERCICE 1

PARTIE A

1.

- Chaque épreuve suit un tirage de Bernoulli :
  succès : « la personne a une carie dentaire » avec une probabilité p = 0,37
  échec : « la personne n'a pas de carie dentaire »
- les 150 épreuves répétées sont indépendantes les unes des autres.
- La variable aléatoire comptabilise le nombre k de succès dans une série de 150 épreuves

cette loi est notée $\mathcal{B}$ **(150 ; 0,37)**

2. a. p(A) = $\boxed{p(X = 50) = 0{,}044 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$

b. p(B) = p(X ≥ 60) = 1 – p(X ≤ 59)

$$\boxed{p(X \geq 60) = 1 - 0{,}752 = 0{,}248 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$$

PARTIE B

1. L'intervalle de fluctuation asymptotique, à 95%, d'une fréquence p obtenue sur un échantillon de taille n est $I = [p - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}]$,

avec ici p = 0,45 et n = 200. $n \geq 30$ et $n \times p \geq 5$ et $n \times (1-p) \geq 5$.

$$I = [0{,}45 - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}45(1-0{,}45)}{200}}\ ;\ 0{,}45 + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}45(1-0{,}45)}{200}}]$$

$$\boxed{\text{d'où } I = [0{,}381\ ;\ 0{,}519]}$$

2. dans cette question p = 0,45 et n = 300.

$$I = [0{,}45 - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}45(1-0{,}45)}{300}}\ ;\ 0{,}45 + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}45(1-0{,}45)}{300}}]$$

$$\boxed{\text{d'où } I = [0{,}394\ ;\ 0{,}506]}$$

La fréquence calculée sur l'échantillon est de $f_e = \frac{165}{300} = 0{,}550$ à 10^{-3} près.

0,550 n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation donc le chef de projet a tort de lancer la production de ce nouveau dentifrice au vu des résultats de cet échantillon de taille 300 et au seuil de 95 %.

PARTIE C

1. Calculons la probabilité pour qu'une lampe de ce modèle prise au hasard ait une durée de bon fonctionnement de moins de 50 000 heures

   $p(0 \leq X < 50\,000) = 1 - p(X \geq 50\,000)$
   En utilisant le renseignement fourni sur le graphique $p(X \geq 50\,000) = 0,368$
   $p(0 \leq X < 50\,000) = 1 - 0,368$
   $\boxed{p(0 \leq X < 50\,000) = 0,632}$ à 10^{-3} près.

2. Si une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ alors $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

   $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ par conséquent $\frac{1}{\lambda} = 60\,000$ d'où $\boxed{\lambda = \frac{1}{60000} = 0,000\,017}$

3. Dans cette question, on choisit $\lambda = 0,000\,02$ et $P(T \leq t) = 1 - e^{-0,00002\,t}$.
   Il s'agit de calculer $P(51\,000 \leq Y \leq 64\,500) = P(Y \leq 64\,500) - P(Y \leq 51\,000)$

   $P(51\,000 \leq Y \leq 64\,500) = 1 - e^{-0,00002 \times 64500} - (1 - e^{-0,00002 \times 51000})$.

   $P(51\,000 \leq Y \leq 64\,500) = e^{-1,02} - e^{-1,29}$

   $\boxed{P(51\,000 \leq Y \leq 64\,500) = 0,361 - 0,275 = 0,086 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$.

EXERCICE 2

Partie A.

1.

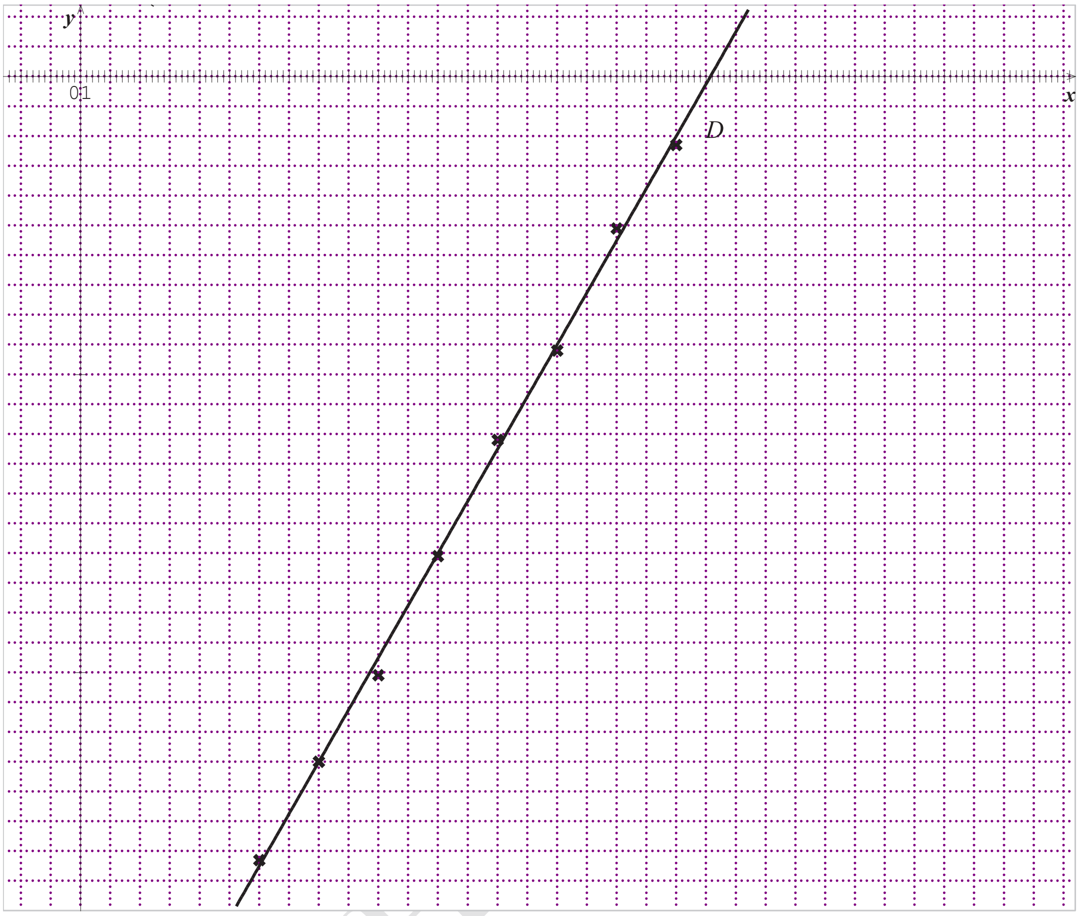
temps t_i	30	40	50	60	70	80	90	100
$z_i = \ln(y_i)$	− 2,63	− 2,30	− 2,01	− 1,61	− 1,22	− 0,92	− 0,51	− 0,23

2. nuage de points voir page 3

3. a. $\boxed{z = 0,035\,0\,t - 3,704\,5}$

b. droite voir page 3

4 . On admet que la droite a pour équation D : $z = 0,035\,t - 3,705$



a. La vitesse spécifique de croissance exponentielle, exprimée par minute, de la population microbienne A est le coefficient directeur de la droite D soit **0,035.**

b. comme il y a 60 minutes dans une heure on a, $\dfrac{0{,}035}{\text{minute}} = \dfrac{0{,}035 \times 60}{\text{heure}}$

donc la vitesse par heure est de 2,10 donc l'espèce microbienne est des E. coli

Partie B.

1. a. (E) : $y' = 0{,}005\,8\,y$ donc $y = \text{k}\,e^{0{,}0058t}$ où k est une constante réelle quelconque.

b. Déterminons la solution de (E) vérifiant la solution initiale $f(60) = 1{,}7$

$1{,}7 = \text{k}\,e^{0{,}0058 \times 60}$ donc k = 1,200 à 10^{-3} près.

$\boxed{\text{d'où } f(t) = 1{,}200\,e^{0{,}0058t}}$

2. Cela revient à chercher le signe de la fonction dérivée :

$f'(t) = 1,2 \times 0,005\,8 \times e^{0,0058t}$

$f'(t) = 0,006\,96 \times e^{0,0058t}$

- or 0,006 96 est strictement positif
- pour tout t de **R,** le réel $e^{0,0058t}$ est strictement positif
- donc pout tout t de [60 , 270], $f'(t)$ est strictement positif

donc la fonction f est une fonction strictement croissante sur [60 , 270],

3. **a.** $f(t) = 3,4$

$1,2\, e^{0,0058t} = 3,4$

$e^{0,0058t} = \frac{17}{6}$

La fonction exponentielle est une fonction dérivable et strictement croissante sur **R**

donc $0,005\,8\, t = \ln \frac{17}{6}$ d'où $t = 179,56$ qui appartient à [60 , 270]

S = $\{179,56\}$

c. **L**'absorbance a doublé en 180 minutes donc au bout de 180 – 60 = 120 minutes depuis le début de croissance donc en **2 heures**

donc l'espèce microbienne est les S . cerevisae

EXERCICE 3

Partie A.

1. a.

valeur de n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
valeur de h	60	67,2	75,3	84,3	94,4	105,7	118,4	132,6	148,6	166,4	186,4

b. L'algorithme affichera **10 .** Pendant 10 ans, le thuya aura une hauteur inférieure à 170 cm et la dixième année il dépassera les 170 cm.

2. **a.** $h_0 = 60$

la hauteur des thuyas augmente de 12 % par an donc le coefficient multiplicateur est de 1 + 0,12 = 1,12

$h_1 = 1{,}12 \times 60 = 67{,}2$

b. $h_{n+1} = 1{,}12 \times h_n$

donc $h_n = h_0 \times (1{,}12)^n$ CAD $\boxed{h_n = 60 \times 1{,}12^n}$

c . Il s'agit de résoudre l'inéquation $h_n < 170$

$$60 \times (1{,}12)^n < 170$$

$$(1{,}12)^n < \frac{17}{6}$$

$$n \ln(1{,}12) < \ln\left(\frac{17}{6}\right)$$

$$n < \frac{\ln\left(\frac{17}{6}\right)}{\ln(1{,}12)}$$

$$n < 9{,}19$$

$\boxed{\text{Donc c'est à la dixième année que les thuyas atteindront la hauteur de Flo}}$

Partie B

9,19 représente 9 ans 2 mois et 8 jours

donc le 9 mars 2023 le papa coupe 15 cm donc **155 cm**

le 01/01/2024 le thuya devait mesurer 186,35 donc moins 15 cela donne **171,35 cm**

le 9 mars 2024 le papa coupe 15 cm donc **156 ,35 cm**

le 01/01/2025 le thuya devait mesurer 193,71 donc moins 15 cela donne **178,71 cm**

le 9 mars 2025 le papa coupe 15 cm donc **156 ,35 cm**

le 01/01/2026 le thuya devait mesurer 216,9 donc moins 15 cela donne **201,94 cm**

donc le thuya va respecter la législation pendant encore un an jusqu'à fin 2025